

ИДЗ 4

Корреляционный и регрессионный анализ

Задание 1. По заданным выборкам

1. Составить корреляционную таблицу. Вычислить выборочный коэффициент корреляции r_0 .

2. Найти выборочные уравнения прямых линий регрессии Y на X и X на Y . Построить графики этих прямых на одном рисунке с наблюдаемыми точками (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$.

Вариант № 1

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
66,6	166	83,4	178	78,7	190	88,7	190	67,3	162
92,0	194	81,9	190	76,5	174	68,2	167	82,6	193
77,0	181	54,0	157	75,5	177	54,0	157	67,3	162
88,7	190	88,5	193	69,6	168	83,4	178	76,0	179
78,0	175	83,2	196	70,8	164	64,0	173	75,9	182
82,0	175	79,1	173	76,2	170	87,9	185	77,3	174
56,6	158	56,6	158	86,5	179	77,6	174	88,7	190
70,6	178	83,3	180	73,3	160	70,8	164	76,2	170
71,6	165	70,6	178	56,6	158	72,1	171	82,0	175
86,5	191	80,3	172	77,8	180	76,6	178	71,6	174

Вариант № 2

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
79,0	184	56,9	154	73,1	177	69,4	168	55,2	151
60,1	159	50,3	145	69,4	177	71,0	171	60,9	167
60,1	159	69,2	176	62,6	172	59,3	155	67,3	171
70,4	173	59,5	164	55,2	156	68,4	167	58,8	158
62,7	163	58,5	151	51,5	147	53,1	154	47,5	149
63,4	170	64,9	159	62,2	163	70,7	172	68,1	166
70,3	169	57,0	157	60,2	168	51,4	148	56,8	161
65,9	169	67,1	164	66,3	170	49,6	144	64,9	162
62,5	163	55,5	147	52,6	145	66,9	175	68,1	165
54,7	156	62,8	166	72,4	182	59,7	155	59,1	165

Вариант № 3

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
58,0	163	63,8	168	64,8	170	75,1	180	68,0	167
70,2	176	65,2	170	62,0	164	64,8	162	60,9	159
69,8	162	67,8	168	76,3	175	71,3	174	68,8	167
61,9	161	62,1	158	62,5	160	58,1	161	70,4	172
65,0	167	67,9	170	62,5	167	62,4	166	55,6	161
68,4	168	60,1	157	68,5	167	62,2	165	63,6	163
72,6	174	74,4	179	63,1	161	65,5	165	77,1	180
76,8	178	59,5	159	72,7	180	56,4	154	63,8	164
67,1	170	75,8	180	63,2	170	57,0	157	65,7	162
65,0	163	63,9	163	61,4	164	72,0	177	65,6	161

Вариант № 4

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
76,0	181	66,3	169	67,9	174	72,1	176	74,7	185
69,7	168	67,7	168	79,6	178	68,9	171	66,9	167
70,7	173	68,3	176	73,9	181	84,7	194	64,5	165
77,0	190	71,1	177	71,4	177	73,9	183	56,4	154
72,7	168	76,6	181	74,2	178	68,6	174	75,7	178
66,8	168	68,7	169	55,3	155	67,2	169	65,7	165
69,5	166	67,4	174	66,8	164	73,9	176	67,5	164
91,8	207	80,1	179	65,0	168	81,9	191	72,4	182
71,6	176	69,7	174	72,4	170	63,8	162	78,7	181
76,9	179	69,9	168	77,2	184	78,3	186	64,2	169

Вариант № 5

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
64,4	160	70,9	160	71,5	183	79,2	179	63,3	154
72,3	187	64,3	170	53,2	157	70,6	160	77,1	184
79,8	171	62,0	172	71,7	172	74,9	188	71,4	171
76,6	164	84,3	197	76,7	184	66,3	171	76,6	180
81,4	195	63,4	173	79,0	195	82,4	179	78,7	185
74,8	171	61,6	166	70,6	174	72,4	175	75,1	178
71,8	176	73,7	174	70,2	175	84,3	192	73,4	183
64,8	178	94,4	201	72,7	176	68,3	166	77,3	173
70,9	173	80,4	189	78,0	190	69,7	167	64,4	168
70,5	175	68,7	169	69,6	179	64,5	170	61,8	166

Вариант № 6

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
56,7	148	82,2	183	90,2	195	77,2	179	69,4	173
82,0	190	69,9	181	87,1	190	73,1	179	69,4	166
67,5	165	86,4	206	77,0	188	87,5	207	81,5	186
68,4	174	72,2	189	78,2	180	76,1	178	71,5	172
77,8	188	77,2	185	70,7	179	81,8	179	79,2	178
71,5	174	71,7	183	82,7	188	66,7	184	75,2	183
74,4	179	73,4	179	76,8	182	68,0	186	69,6	173
77,9	181	78,5	191	74,3	182	73,9	177	73,9	187
74,5	176	80,6	193	80,3	180	92,5	207	80,9	196
70,0	182	88,9	193	82,7	189	78,9	188	76,0	175

Вариант № 7

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
60,2	158	59,5	156	62,0	159	74,2	177	69,7	163
53,9	151	80,7	181	77,9	174	76,7	168	76,5	174
72,5	179	64,0	158	73,7	176	73,3	164	70,3	173
77,6	178	64,7	161	58,9	156	63,3	167	71,9	170
61,6	169	78,6	175	69,2	154	68,1	155	57,7	158
65,6	165	62,0	168	75,3	172	55,1	152	72,7	163
54,1	148	57,2	149	61,0	160	73,8	177	65,3	166
59,2	153	69,6	171	55,7	157	61,6	160	68,5	172
60,6	157	71,8	164	68,1	167	60,6	161	68,9	159
52,8	158	61,8	157	70,7	171	56,0	156	80,5	177

Вариант № 8

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
76,1	175	53,8	162	78,3	177	74,4	177	61,7	165
74,1	170	84,1	186	62,8	170	75,9	168	81,7	183
69,2	168	76,9	173	59,2	152	69,1	168	67,8	166
73,3	162	85,3	195	67,9	170	72,7	163	65,9	164
78,2	179	67,5	171	71,5	167	69,1	172	79,0	187
79,4	186	85,5	185	67,1	167	70,8	174	63,0	168
69,4	168	70,5	169	60,1	163	76,5	179	81,6	177
66,3	158	76,4	181	74,1	172	80,7	192	74,0	172
64,5	160	78,0	168	58,1	149	64,3	163	66,1	165
79,4	183	70,9	169	65,5	162	67,8	171	78,9	177

Задание 2. Решить задачи

1. Рейтинги шести банков оценены двумя экспертами:

Номер банка	1	2	3	4	5	6
1 эксперт	7	8	9	5	6	7
2 эксперт	3	8	8	6	3	9

На основе рангового коэффициента Спирмена найдите тесноту связи между этими данными, рассматривая их, как выборочные наблюдения случайных величин. Сделайте вывод о согласованности оценок экспертов.

2. Семь студентов проходят аттестацию по результатам теста и на основе оценки, поставленной им преподавателем. Результаты их аттестации таковы:

Преподаватели	1	2	3	4	5	6	7
Результаты теста	7	2	5	4	3	8	9
Оценка преподавателя	6	3	5	7	9	10	8

На основе рангового коэффициента Спирмена найдите тесноту связи между двумя показателями оценки студента, рассматривая данные, как выборочные наблюдения случайных величин. Сделайте вывод.

3. Приведены результаты тестирования студента по двум тестам. Получены следующие оценки на семи вопросам каждого теста:

Вопросы	1	2	3	4	5	6	7
Тест 1	8	5	4	8	3	2	9
Тест 2	7	5	6	9	4	6	8

На основе рангового коэффициента Спирмена найдите тесноту связи между результатами тестирования студента по двум тестам, рассматривая их, как выборочные наблюдения случайных величин. Сделайте вывод.

4. Приведены оценки (по 10-ти бальной шкале) студента по пяти различным дисциплинам при первом и втором рубежном контроле:

KP1	7	5	3	8	9
KP2	5	4	7	7	8

На основе рангового коэффициента Спирмена найдите тесноту связи между результатами первого и второго рубежного контроля учебы студента, рассматривая данные, как выборочные наблюдения случайных величин. Сделайте выводы.

5. Два студента ответили на пять тестов. Результаты их тестирования таковы:

Тесты	1	2	3	4	5
1 студент	8	5	4	7	9
2 студент	4	6	4	8	5

6. Шесть сотрудников предприятия проходят аттестацию по результатам теста и на основе количества заказов, полученных каждым из них за определенный промежуток времени. Результаты их аттестации таковы:

Сотрудники	1	2	3	4	5	6
Результаты теста	3	2	6	4	1	6
Количество заказов	1	5	5	2	5	6

На основе рангового коэффициента Спирмена найдите тесноту связи между двумя показателями деятельности сотрудников, рассматривая данные, как выборочные наблюдения случайных величин. Сделайте выводы.

7. Мужчины и женщины по-разному оценивают положительные человеческие качества. Предложили мужчинам и женщинам на основе десятибалльной шкалы (10 баллов – это максимум) оценить важность следующих пяти качеств в представителях противоположного пола:

Качества	Ум	Доброта	Красота	Юмор	Работоспособность
Мужчины	7	8	8	5	7
Женщины	10	5	3	8	10

Найдите тесноту связи между этими данными, рассматривая данные, как выборочные наблюдения случайных величин. Сделайте вывод о том, насколько близки или далеки мужчины и женщины в оценках качеств партнеров.

8. Приведены оценки студентки по шести различным дисциплинам при первом и втором рубежном контроле:

КР1	7	6	4	8	9	8
КР2	6	4	5	7	9	8

На основе рангового коэффициента Спирмена найдите тесноту связи между результатами учебы студентки при первом и втором рубежном контроле, рассматривая данные, как выборочные наблюдения случайных величин. Сделайте вывод.

Задание 3. По заданной корреляционной таблице определить:

1. Числовые характеристики $\bar{X}, \bar{Y}, \sigma_x, \sigma_y$.
2. Условные средние \bar{Y}_x, \bar{X}_y .
3. Коэффициент корреляции и детерминации.
4. Корреляционные отношения $\eta_{y/x}, \eta_{x/y}$
5. Параметры эмпирической линейной функции регрессии Y на X и X на Y
6. Точечную оценку условной средней \bar{Y}_x по X^* . Принять $\alpha = 0,05$.

1.

r	14 – 18	18 – 22	22 – 26	26 – 30	30 – 34	34 – 38	n_x	
x								
17 – 19	2	1					3	
19 – 21	1	3	3				7	
21 – 23		3	4	8			15	
23 – 25			3	6	7		16	
25 – 27				1	5	1	7	
27 – 29					1	1	2	
n_y	3	7	10	15	13	2	50	$X^* = 25$

2.

$X \backslash Y$	10-14	14-18	18-22	22-26	26-30	30-34	n_x
15-25	3	4					7
25-35		2	6				8
35-45			3	50	4		57
45-55			2	8	6		16
55-65				3	7	2	12
n_y	3	6	11	61	17	2	100

$$X^* = 17$$

3.

$X \backslash Y$	16-28	28-40	40-52	52-64	64-76	76-88	n_x
10-13	2						2
13-16	2	2	2				6
16-19	3	4	25	2			34
19-22		1	2	1	3		7
22-25						1	1
n_y	7	7	29	3	3	1	50

$$X^* = 24$$

4.

$X \backslash Y$	6-16	16-26	26-36	36-46	46-56	n_x
0-12	4					4
12-24	7	2	5			14
24-36	8	8	40	6		62
36-48		7	5	2		14
48-60				2	2	4
60-72				1	1	2
n_y	19	17	50	11	3	100

$$X^* = 55$$

5.

$X \backslash Y$	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	n_x
10-14	1	2				3
14-18		4	10			14
18-22		2	20	8		30
22-26				2	1	3
n_y	1	8	30	10	1	50

$$X^* = 15$$

6.

$X \backslash Y$	14-24	24-34	34-44	44-54	54-64	64-74	n_x
12-14	1	2					3
14-16		1	2	3			6
16-18			4	24	4		32
18-20		1	1	3	2	1	8
20-22						1	1
n_y	1	4	7	30	6	2	50

$$X^* = 22$$

7.

$X \backslash Y$	0-8	8-16	16-24	24-32	32-40	40-48	n_x
30-40					1	1	2
40-50				1	3		4
50-60			2	8	20		30
60-70		6	15	3			24
70-80	5	7	3	6			21
80-90	3	5	5				13
90-100	4	2					6
n_y	12	20	25	18	24	1	100

$$X^* = 63$$

8.

$X \backslash Y$	24-30	30-36	36-42	42-48	48-54	54-60	n_x
10-15	2	2	2				6
15-20		2	2	8			12
20-25				15	10		25
25-30					4	2	6
30-35						1	1
n_y	2	4	4	23	14	3	50

$$\bar{X}^* = 21$$

Задание 4. Дана таблица распределения 100 заводов по производственным средствам X (тыс. ден. ед.) и по суточной выработке Y (т). Известно, что между X и Y существует линейная корреляционная зависимость. Требуется:

1. Найти уравнение прямой регрессии y на x ;
2. Построить уравнение эмпирической линии регрессии и случайные точки выборки (X, Y) .

1.

$X \backslash Y$	2,2	3,6	5,0	6,4	7,8	9,2	10,6	12	m_x
200	5	3	4	--	--	--	--	--	12
360	--	7	8	--	--	--	--	--	15
520	--	--	9	10	14	--	--	--	33
680	--	--	--	8	7	6	--	--	21
840	--	--	--	--	2	3	2	--	7
1000	--	--	--	--	--	--	6	6	12
m_y	5	10	21	18	23	9	8	6	100

2.

$X \backslash Y$	2,3	3,8	5,3	6,8	7,3	8,8	10,3	11,8	m_x
210	--	4	3	5	--	--	--	--	12
340	--	6	7	8	--	--	--	--	21
470	--	--	10	12	11	--	--	--	33
600	--	--	--	--	5	4	3	--	12
730	--	--	--	--	--	6	8	--	14
860	--	--	--	--	--	--	3	5	8
m_y	--	10	20	25	16	10	14	5	100

3.

$X \backslash Y$	22,0	22,4	22,8	23,2	23,6	24,0	24,4	24,8	m_x
1,00	3	2	1	--	--	--	--	--	6
1,20	--	--	4	5	--	--	--	--	9
1,40	--	--	10	7	6	--	--	--	23
1,60	--	--	--	12	9	5	--	--	26
1,80	--	--	--	--	7	4	3	--	14
2,00	--	--	--	--	--	5	9	8	22
m_y	3	2	15	24	22	14	12	8	100

4.

$X \backslash Y$	21,0	21,3	21,6	21,9	22,2	22,5	22,8	23,1	m_x
0,90	1	3	2	—	—	—	—	—	6
1,05	—	4	2	3	—	—	—	—	9
1,20	—	—	5	7	6	—	—	—	18
1,35	—	—	—	6	14	9	—	—	29
1,50	—	—	—	—	7	6	7	—	20
1,65	—	—	—	—	—	6	7	5	18
m_y	1	7	9	16	27	21	14	5	100

5.

$X \backslash Y$	64	72	80	88	96	104	112	120	m_x
1,0	6	2	4	—	—	—	—	—	12
1,3	—	3	8	6	—	—	—	—	17
1,6	—	—	—	8	14	5	—	—	27
1,9	—	—	—	7	8	9	—	—	24
2,2	—	—	—	—	4	5	6	—	15
2,5	—	—	—	—	—	1	1	3	5
m_y	6	5	12	21	26	20	7	3	100

6.

$X \backslash Y$	56	68	80	92	104	116	128	140	m_x
0,9	2	3	5	—	—	—	—	—	10
1,3	—	6	3	5	—	—	—	—	14
1,7	—	—	5	8	15	—	—	—	28
2,1	—	—	—	6	9	10	—	—	25
2,5	—	—	—	—	1	6	8	—	15
2,9	—	—	—	—	—	3	4	1	8
m_y	2	9	13	19	25	19	12	1	100

7.

$X \backslash Y$	20	40	60	80	100	120	140	160	m_x
1000	2	7	3	—	—	—	—	—	12
2000	—	6	4	5	—	—	—	—	15
3000	—	—	8	9	7	—	—	—	24
4000	—	—	—	7	14	5	—	—	26
5000	—	—	—	—	5	7	4	—	16
6000	—	—	—	—	—	—	4	3	7
m_y	2	13	15	21	26	12	8	3	100

8.

$X \backslash Y$	15	30	45	60	75	90	105	120	m_x
750	2	4	2	–	–	–	–	–	8
1250	–	–	6	7	3	–	–	–	16
1750	–	–	–	6	13	9	–	–	28
2250	–	–	–	6	8	9	–	–	23
2750	–	–	–	–	7	8	1	–	16
3250	–	–	–	–	–	1	5	3	9
m_y	2	4	8	19	31	27	6	3	100

Образец выполнения ИДЗ

Задание 1.

1. Пусть выборочная совокупность приводится в таблице 1.

Таблица 1 – Выборочная совокупность

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
62,7	168	86,5	179	85,6	188	75,6	168	84,5	188
91,4	197	81,7	185	77,0	181	63,6	164	79,9	183
77,3	174	62,7	168	87,9	185	80,5	175	86,5	191
70,5	169	82,6	193	87,4	184	68,2	167	72,7	174
78,7	190	76,6	178	73,3	160	74,4	166	78,1	172
71,6	165	72,7	174	87,4	184	79,4	176	71,6	165
67,4	162	75,6	168	76,5	177	85,7	185	74,7	170
76,8	177	75,9	169	76,7	179	81,9	190	71,6	174
96,5	194	75,3	177	77,0	181	75,5	177	75,9	182
91,4	197	70,1	183	73,2	178	76,6	178	88,7	190

Напомним, что величина x_i – вес (в килограммах), а y_i – рост (в сантиметрах) i -го человека.

Составим группированный ряд для величины X . Для этого найдём наибольшее $x_{max} = 96,5$ и наименьшее $x_{min} = 62,7$ значения величины X , встречающиеся в выборке. Вычислим размах

$R_x = x_{max} - x_{min} = 96,5 - 62,7 = 33,8$. Промежуток $[62,7; 96,5]$ изменения выборочных данных величины X разобьём на $r = 7$ интервалов (следуя рекомендации в пункте 3.1.2, при $n = 50$).

Тогда шаг разбиения $h_x = \frac{R_x}{r} = \frac{33,8}{7} \approx 4,829$. Для удобства возьмём $h_x = 5$. Тогда расширение промежутка разбиения составит $(5 - 4,829) \cdot 7 \approx 1,2$. Для определения границ интервалов $[a_{i-1}, a_i)$ можно для удобства (чтобы границы интервалов стали целыми числами) сдвинуть начало 1-го интервала, например, в точку $a_0 = x_{min} - 0,7 = 62,7 - 0,7 = 62$.

Ясно, что остальные границы вычисляются так: $a_i = a_{i-1} + h_x$.

Затем для каждого i -го интервала $[a_{i-1}, a_i)$ определяется его

середина x_i^* по формуле $x_i^* = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_i)$ и с помощью таблицы 1 находятся частоты n_i – количество выборочных значений X , попавших в i -й интервал. Результаты группировки выборочных значений для X сведём в таблицу 2.

Таблица 2 – Группированный ряд для X

i	$[a_{i-1}, a_i)$	x_i^*	n_i	$\frac{i}{n}$	$\frac{i}{nh_x}$
1	[62, 67)	64,5	3	0,06	0,012
2	[67, 72)	69,5	7	0,14	0,028
3	[72, 77)	74,5	17	0,34	0,068
4	[77, 82)	79,5	10	0,20	0,040
5	[82, 87)	84,5	6	0,12	0,024
6	[87, 92)	89,5	6	0,12	0,024
7	[92, 97]	94,5	1	0,02	0,004

Для величины Y аналогичные результаты укажем в окончательном виде. Имеем:

$y_{min} = 160, y_{max} = 197 \Rightarrow R_y = 37, h_y = \frac{R_y}{7} \approx 5,3$. Возьмём для удобства $h_y = 6$.

Результаты группировки выборочных значений для Y сведём в таблицу 3:

Таблица 3 – Группированный ряд для Y

i	$[b_{i-1}, b_i)$	y_i^*	m_i	$\frac{m_i}{n}$	$\frac{m_i}{nh_y}$
1	[158, 164)	161	2	0,04	0,007
2	[164, 170)	167	11	0,22	0,037
3	[170, 176)	173	7	0,14	0,023
4	[176, 182)	179	12	0,24	0,040
5	[182, 188)	185	8	0,16	0,027
6	[188, 194)	191	7	0,14	0,023
7	[194, 200]	197	3	0,06	0,010

Построим корреляционную таблицу 4 – таблицу с двумя входами. По вертикали расположим интервалы $[a_{i-1}, a_i)$ для величины X , а по горизонтали интервалы $[b_{j-1}, b_j)$ для величины Y . Каждую пару выборочных значений (x_k, y_k) разнесём по полученным клеткам, в результате получим частоты n_{ij} – количество пар (x_k, y_k) таких, что $x_k \in [a_{i-1}, a_i)$ и $y_k \in [b_{j-1}, b_j)$.

В угловых скобках $\langle \dots \rangle$ указаны значения условных вариантов $u_i = \frac{x_i^* - 79,5}{5}, v_i = \frac{y_i^* - 179}{6}$.

Таблица 4 – Корреляционная таблица

Y \ X	[158;164]	[164;170]	[170;176]	[176;182]	[182;188]	[188;194]	[194;200]	$n_{i.}$
	$y_1^* = 161$ <-3>	$y_2^* = 167$ <-2>	$y_3^* = 173$ <-1>	$y_4^* = 179$ <0>	$y_5^* = 185$ <1>	$y_6^* = 191$ <2>	$y_7^* = 197$ <3>	
[62; 67] $x_1^* = 64,5$ <-3>		...						3
[67; 72] $x_2^* = 69,5$ <-2>			7
[72; 77] $x_3^* = 74,5$ <-1>	1	4	1		1			17
[77; 82] $x_4^* = 79,5$ <0>	1	4	3	1			10
[82; 87] $x_5^* = 84,5$ <1>			3	3	2	2		6
[87; 92] $x_6^* = 89,5$ <2>				1	1		6
[92; 97] $x_7^* = 94,5$ <3>					3	1	..	1
\cdot_j	2	11	7	12	8	7	3	$\Sigma=50$

Вычислим выборочный коэффициент r_6 , используя услов-

ные варианты:
$$r_6 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\overline{u \cdot v} - \bar{u} \cdot \bar{v}}{s_u \cdot s_v}$$

Находим

$$\begin{aligned} \overline{u \cdot v} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 u_i v_j n_{ij} = \frac{1}{50} [(-3) \cdot (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot (-3) \cdot 1 + \\ &+ (-2) \cdot (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 \cdot 1 + \\ &+ (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + \\ &+ 1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1] = \frac{93}{50} = 1,86. \end{aligned}$$

Ранее было вычислено:

$$\bar{u} = -0,38; \quad \bar{v} = -0,08; \quad s_u = 1,46; \quad s_v = 1,64.$$

Итак,

$$r_6 = \frac{50}{49} \cdot \frac{1,86 - (-0,38) \cdot (-0,08)}{1,46 \cdot 1,64} \approx 0,78.$$

2. Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X :

$$y - \bar{y} = r_e \cdot \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x}).$$

Подставляя в это уравнение ранее вычисленные значения \bar{x} , \bar{y} , s_x , s_y , r_e , получаем

$$y - 178,5 = 0,78 \cdot \frac{9,84}{7,28} (x - 77,6) \text{ или } y = 1,05x + 96,69.$$

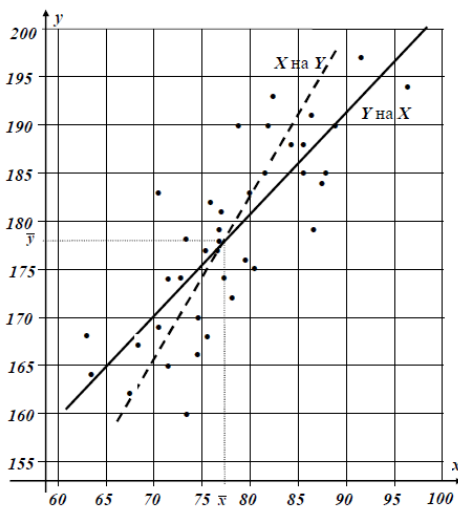
Выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y :

$$x - \bar{x} = r_e \cdot \frac{s_x}{s_y} (y - \bar{y}).$$

Отсюда

$$x - 77,6 = 0,78 \cdot \frac{7,28}{9,84} (y - 178,5) \text{ или } x = 0,58y - 25,41.$$

Изобразим на рисунке прямые линии регрессии Y на X (сплошной линией) и X на Y (пунктирной линией). На этом же рисунке отметим выборочные точки (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, 50$ (диаграмма рассеивания).



Задание 2. Куратор выясняет, как связаны результаты успеваемости студентов по математике и физике, результаты которых приведены в виде ранжированного ряда по фамилиям.

Учащийся	A	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Σ
Успеваемость по математике x_i	2	6	10	5	1	4	3	9	8	7	-
Успеваемость по физике y_i	1	5	8	7	4	2	3	10	9	6	-
Квадрат разности между рангами $d_i^2 = (x_i - y_i)^2$	1	1	4	4	9	4	0	1	1	1	26

Решение:

Вычислим сумму $\sum d_i^2 = 26$, тогда коэффициент корреляции рангов Спирмена равен

$$r_S = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 26}{10(10^2 - 1)} = 1 - \frac{156}{990} = 0,84.$$

Проверим значимость найденного рангового коэффициента корреляции. Найдем критические значения коэффициента ранговой корреляции Спирмена по таблице прил. 1 для $\alpha = 0,01$ и $n = 10$:

$$(r_S)_{кр} = 0,79.$$

Значение выборочного коэффициента ранговой корреляции $r_S = 0,84$ больше значения $(r_S)_{кр} = 0,79$. Это говорит о том, что значение $r_S = 0,84$ попало в область значимости коэффициента корреляции. Поэтому можно утверждать, что коэффициент корреляции рангов Спирмена значимо отличается от 0.

Таким образом, результаты успеваемости студентов по математике и физике связаны положительной корреляционной зависимостью. Существует значимая положительная корреляция между успеваемостью по математике и успеваемостью по физике: чем лучше успеваемость по математике, тем в среднем лучше результаты по физике, и наоборот.

Задание 3. По заданной корреляционной таблице

$Y \backslash X$	23	29	35	41	47	53
13	2	2	3	–	–	–
17	1	2	4	–	–	–
21	–	2	14	7	–	–
25	–	–	–	5	2	1
29	–	–	–	2	2	1

$$X^* = 28$$

определить:

1. Числовые характеристики $\bar{X}, \bar{Y}, \sigma_x, \sigma_y$.
2. Условные средние \bar{Y}_x, \bar{X}_y .
3. Коэффициент корреляции и детерминации.
4. Корреляционные отношения $\eta_{y/x}, \eta_{x/y}$.
5. Параметры эмпирической линейной функции регрессии Y на X и X на Y .
6. Точечную оценку условной средней \bar{Y}_x по X^* . Принять $\alpha = 0,05$.

1. Находим характеристики выборки:

$$\bar{X} = \frac{\sum x \cdot n_x}{\sum n_x} = \frac{1038}{50} = 20,76; \quad \bar{X}^2 = \frac{\sum x^2 \cdot n_x}{\sum n_x} = \frac{22554}{50} = 451,08;$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum y \cdot n_y}{\sum n_y} = \frac{1846}{50} = 36,92; \quad \bar{Y}^2 = \frac{\sum y^2 \cdot n_y}{\sum n_y} = \frac{70346}{50} = 1406,92;$$

$$D(X) = \bar{X}^2 - (\bar{X})^2 = 451,08 - (20,76)^2 = 451,08 - 430,9776 = 20,1024;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{20,1024} \approx 4,48;$$

$$D(Y) = \overline{Y^2} - (\overline{Y})^2 = 1406,92 - (36,92)^2 = 43,8336;$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} \approx 6,62.$$

2. Находим условные средние \overline{Y}_x :

$$\overline{Y}_{x=13} = \frac{23 \cdot 2 + 29 \cdot 2 + 35 \cdot 3}{7} = \frac{209}{7} \approx 29,86;$$

$$\overline{Y}_{x=17} = \frac{23 \cdot 1 + 29 \cdot 2 + 35 \cdot 4}{7} = \frac{221}{7} \approx 31,57;$$

$$\overline{Y}_{x=21} = \frac{29 \cdot 2 + 35 \cdot 14 + 41 \cdot 7}{23} = \frac{835}{23} \approx 36,30;$$

$$\overline{Y}_{x=25} = \frac{41 \cdot 5 + 47 \cdot 2 + 53 \cdot 1}{8} = \frac{352}{8} = 44,00;$$

$$\overline{Y}_{x=29} = \frac{41 \cdot 2 + 47 \cdot 2 + 53 \cdot 1}{5} = \frac{229}{5} = 45,80.$$

Условные средние \overline{X}_y :

$X \backslash Y$	23	29	35	41	47	53	n_x	$x \cdot n_x$	$x^2 \cdot n_x$	$\sum Y n_{ij}$	$X \cdot \sum Y n_{ij}$
13	2	2	3	–	–	–	7	91	1183	$23 \cdot 2 + 29 \cdot 2 + 35 \cdot 3 = 209$	2717
17	1	2	4	–	–	–	7	119	2023	$23 \cdot 1 + 29 \cdot 2 + 35 \cdot 4 = 221$	3757
21	–	2	14	7	–	–	23	483	10 143	$29 \cdot 2 + 35 \cdot 14 + 41 \cdot 7 = 835$	17 535
25	–	–	–	5	2	1	8	200	5000	$41 \cdot 5 + 47 \cdot 2 + 53 \cdot 1 = 352$	8800
29	–	–	–	2	2	1	5	145	4205	$41 \cdot 2 + 47 \cdot 2 + 53 \cdot 1 = 229$	6641
n_y	3	6	21	14	4	2	50	1038	22 554		39 450
$Y \cdot n_y$	69	174	735	574	188	106	1846				
$Y^2 \cdot n_y$	1587	5046	25 725	23 534	8836	5618	70 346				

$$\overline{X}_{y=23} = \frac{13 \cdot 2 + 17 \cdot 1}{3} = \frac{43}{3} \approx 14,33;$$

$$\overline{X}_{y=29} = \frac{13 \cdot 2 + 17 \cdot 2 + 21 \cdot 2}{6} = \frac{102}{6} = 17,00;$$

$$\overline{X}_{y=35} = \frac{13 \cdot 3 + 17 \cdot 4 + 21 \cdot 14}{21} = \frac{39 + 68 + 294}{21} = \frac{401}{21} \approx 19,10;$$

$$\overline{X}_{y=41} = \frac{21 \cdot 7 + 25 \cdot 5 + 29 \cdot 2}{14} = \frac{147 + 125 + 58}{14} = \frac{330}{14} \approx 23,57;$$

$$\overline{X}_{y=47} = \frac{25 \cdot 2 + 29 \cdot 2}{4} = \frac{108}{4} = 27,00;$$

$$\overline{X}_{y=53} = \frac{25 \cdot 1 + 29 \cdot 1}{2} = \frac{54}{2} = 27,00.$$

3. Находим коэффициенты корреляции и детерминации.

Коэффициент корреляции:

$$r = \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y};$$

$$\overline{XY} = \frac{\sum X \sum Y \cdot n_{ij}}{\sum \sum n_{ij}} = \frac{39\,450}{50} = 789;$$

$$r = \frac{789 - 20,76 \cdot 36,92}{4,48 \cdot 6,62} = \frac{789 - 766,4592}{29,6576} \approx 0,76.$$

Коэффициент детерминации: $r^2 = 0,76^2 \approx 0,58$.

4. Корреляционные отношения:

$$\eta_{Y/X} = \frac{\sigma_{\bar{Y}_x}}{\sigma_y};$$

$$\sigma_{\bar{Y}_x} = \sqrt{\frac{\sum (\bar{Y}_x - \bar{Y})^2 \cdot n_x}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(29,86 - 36,92)^2 \cdot 7 + (31,57 - 36,92)^2 \cdot 7 + (36,30 - 36,92)^2 \cdot 23 + (44 - 36,92)^2 \cdot 8 + (45,80 - 36,92)^2 \cdot 5}{50}} =$$

$$= \sqrt{\frac{348,91 + 200,36 + 8,84 + 401,01 + 394,27}{50}} = 5,20.$$

$$\eta_{Y/X} = \frac{5,20}{6,62} \approx 0,79.$$

$$\eta_{X/Y} = \frac{\sigma_{\bar{X}_y}}{\sigma_x}.$$

$$\sigma_{\bar{X}_y} = \sqrt{\frac{\sum (\bar{X}_y - \bar{X})^2 \cdot n_y}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(14,33 - 20,76)^2 \cdot 3 + (17 - 20,76)^2 \cdot 6 + (19,10 - 20,76)^2 \cdot 21 + (23,57 - 20,76)^2 \cdot 14 + (27 - 20,76)^2 \cdot 4 + (27 - 20,76)^2 \cdot 2}{50}} =$$

$$= \sqrt{\frac{124,03 + 84,83 + 57,87 + 110,55 + 155,75 + 77,88}{50}} = \sqrt{\frac{610,91}{50}} \approx 3,50.$$

$$\eta_{X/Y} = \frac{3,50}{4,48} \approx 0,78.$$

5. Находим эмпирические линейные функции регрессии. Уравнение прямой линии регрессии Y на X :

$$\bar{Y}_x - \bar{Y} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x});$$

$$\bar{Y}_x - 36,92 = 0,76 \cdot \frac{6,62}{4,48} (x - 20,76);$$

$$\bar{Y}_x - 36,92 = 1,12(x - 20,76);$$

$$\bar{Y}_x = 1,12 \cdot x + 13,67.$$

Уравнение прямой линии регрессии X на Y :

$$\bar{X}_y - \bar{X} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y});$$

$$\bar{X}_y - 20,76 = 0,76 \cdot \frac{4,48}{6,62} (y - 36,92);$$

$$\bar{X}_y - 20,76 = 0,51y - 18,99;$$

$$\bar{X}_y = 0,51y + 1,77.$$

6. Найдем остаточную сумму квадратов для обоих уравнений регрессии:

$$\begin{aligned} S_1^2 &= \frac{1}{n-2} \cdot \sum (\bar{Y}_x - (ax_i + b))^2 n_x = \frac{1}{48} ((29,86 - 1,12 \cdot 13 - 13,67)^2 \cdot 7 + \\ &+ (31,57 - 1,12 \cdot 17 - 13,67)^2 \cdot 7 - (36,30 - 1,12 \cdot 21 - 13,67)^2 \cdot 23 + \\ &+ (44 - 1,12 \cdot 25 - 13,67)^2 \cdot 8 + (45,80 - 1,12 \cdot 29 - 13,67)^2 \cdot 5) = \\ &= \frac{1}{48} (18,60 + 9,10 + 18,22 + 43,43 + 0,61) \approx 1,87; \quad S_1 \approx 1,37. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2^2 &= \frac{1}{n-2} \cdot \sum (\bar{X}_y - (cy + d))^2 n_y = \frac{1}{48} ((14,33 - 0,51 \cdot 23 - 1,77)^2 \cdot 3 + \\ &+ (17,0 - 0,51 \cdot 29 - 1,77)^2 \cdot 6 - (19,1 - 0,51 \cdot 35 - 1,77)^2 \cdot 21 + \\ &+ (23,57 - 0,51 \cdot 41 - 1,77)^2 \cdot 14 + (27 - 0,51 \cdot 47 - 1,77)^2 \cdot 4 + \\ &+ (27 - 0,51 \cdot 53 - 1,77)^2 \cdot 2) = \frac{1}{48} (2,07 + 1,16 + 5,68 + 11,09 + 6,35 + 6,48) \approx 0,68; \\ S_2 &\approx 0,82. \end{aligned}$$

$$Q_x = \sum x^2 n_x - \frac{(\sum x \cdot n_x)^2}{n} = 22\,554 - \frac{1038^2}{50} = 1005,12;$$

$$Q_y = \sum y^2 n_y - \frac{(\sum y \cdot n_y)^2}{n} = 70346 - \frac{1846^2}{50} = 2191,68.$$

Границы для доверительных интервалов коэффициентов регрессии можно найти по формулам:

$$\tilde{\rho}_{y/x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \cdot S_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{Q_x}};$$

$$\tilde{\rho}_{x/y} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) \cdot S_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{Q_y}};$$

где $\tilde{\rho}_{y/x} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$; $\tilde{\rho}_{x/y} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$; $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$ – квантиль распределения Стьюдента с $(n-2)$ степенями свободы.

Итак,

$$\rho_{y/x} \in \left(1,12 - t_{0,95}(48) \cdot 1,37 \sqrt{\frac{1}{1005,12}}; 1,12 + t_{0,95}(48) \cdot 1,37 \sqrt{\frac{1}{1005,12}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_{y/x} \in (1,12 - 2,01 \cdot 1,37 \cdot 0,03; 1,12 + 2,01 \cdot 1,37 \cdot 0,03) \Rightarrow \rho_{y/x} \in (1,04; 1,20).$$

$$\rho_{x/y} \in \left(0,51 - 2,01 \cdot 0,82 \sqrt{\frac{1}{2191,68}}; 0,51 + 2,01 \cdot 0,82 \sqrt{\frac{1}{2191,68}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0,51 - 0,035; 0,51 + 0,035) \Rightarrow \rho_{x/y} \in (0,47; 0,55).$$

7. Точечную оценку \bar{Y}_x найдем, подставив в уравнение регрессии $\bar{y}_x = 1,12x + 13,67$ значение $X^* = 28$: $\bar{Y}_x = 1,12 \cdot 28 + 13,68 = 45,04$.

Задание 4. Дана таблица распределения 100 заводов по производственным средствам X (тыс. ден. ед.) и по суточной выработке Y (т). Известно, что между X и Y существует линейная корреляционная зависимость. Требуется:

1. Найти уравнение прямой регрессии y на x ;
2. Построить уравнение эмпирической линии регрессии и случайные точки выборки (X, Y) .

$X \backslash Y$	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5	15,0	m_x
60	2	4	3	10	4	—	—	—	23
90	—	—	6	14	5	—	—	—	25
120	—	—	—	—	17	5	4	—	26
150	—	—	—	—	—	8	3	2	13
180	—	—	—	—	—	4	3	1	8
210	—	—	—	—	—	2	1	2	5
m_y	2	4	9	24	26	19	11	5	100

► Для подсчета числовых характеристик (выборочных средних \bar{x} и \bar{y} , выборочных средних квадратичных отклонений s_x и s_y и выборочного корреляционного момента s_{xy}) составляем расчетную таблицу (табл. 5). При заполнении таблицы осуществляем контроль по строкам и столбцам:

$$\sum_{i=1}^6 m_{xi} = \sum_{j=1}^8 m_{yj} = n = 100,$$

$$\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^8 m_{ij} x_i = \sum_{i=1}^6 m_{xi} x_i = 11\,190,$$

$$\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^8 m_{ij} y_j = \sum_{j=1}^8 m_{yj} y_j = 1042,$$

$$\sum_{i=1}^6 \left(x_i \sum_{j=1}^8 m_{ij} y_j \right) = \sum_{j=1}^8 \left(y_j \sum_{i=1}^6 m_{ij} x_i \right) = 124\,245.$$

Вычисляем выборочные средние \bar{x} и \bar{y} , $i = \overline{1, 6}$; $j = \overline{1, 8}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum \sum m_{ij} x_i}{n} = \frac{\sum m_{x_i} x_i}{n} = \frac{11\,190}{100} = 111,9;$$

$$\bar{y} = \frac{\sum m_{y_j} y_j}{n} = \frac{1041}{100} = 10,41.$$

Выборочные дисперсии находим по формулам:

$$\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{1}{n-1} \left(\sum m_{x_i} x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum m_{x_i} x_i)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{99} \left(1\,431\,900 - \frac{1}{100} (11\,190)^2 \right) = 13\,118,58, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{1}{n-1} \left(\sum m_{y_j} y_j^2 - \frac{1}{n} (\sum m_{y_j} y_j)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{99} \left(11\,367 - \frac{1}{100} (1041)^2 \right) = 5,35. \end{aligned}$$

Таблица 5

	<i>j</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<i>i</i>	<i>X</i> \ <i>Y</i>	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5	15,0	m_{x_i}	$m_{x_i} x_i$	$\sum_{j=1}^k m_{y_j} y_j$	$x_i^2 m_{x_i}$	$x_i \sum_{j=1}^k m_{ij} y_j$
1	60	2	4	3	10	4	-	-	-	23	1380	187,5	82 800	11 250
2	90	-	-	6	14	5	-	-	-	25	2250	223,5	202 500	20 115
3	120	-	-	-	-	17	5	4	-	26	3120	292,5	374 400	35 100
4	150	-	-	-	-	-	8	3	2	13	1950	166,5	292 500	24 975
5	180	-	-	-	-	-	4	3	1	8	1440	103,5	259 200	18 630
6	210	-	-	-	-	-	2	1	2	5	1050	67,5	220 500	14 175
7	m_{y_j}	2	4	9	24	26	19	11	5	100	11 190	1041	1 431 990	124 245
8	$m_{y_j} y_j$	9	24	67,5	216	273	228	148,5	75	1041	-	-	-	-
9	$\sum_{i=1}^m m_{ij} x_i$	120	240	720	1860	2730	2940	1680	900	11 190	-	-	-	-
10	$y_j^2 m_{y_j}$	40,5	144	506,25	1944	2866,5	2736	2004,7	1125	11 367	-	-	-	-
11	$y_j \sum_{i=1}^m m_{ij} x_i$	540	1440	5400	16 740	28 665	35 280	22 680	3500	124 245	-	-	-	-

Корреляционный момент вычисляем по формуле

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{n-1} \left(\sum \sum m_{ij} x_i y_j - \frac{1}{n} (\sum m_{x_i} x_i) (\sum m_{y_j} y_j) \right) = \\ &= \frac{1}{99} \left(124\,245 - \frac{1}{100} (11\,190 \cdot 1041) \right) = 78,35. \end{aligned}$$

Оценкой теоретической линии регрессии является эмпирическая линия регрессии, уравнение которой имеет вид:

$$y = \bar{y} + r_{xy} \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x}),$$

где $s_x = \sqrt{13118,58} \approx 114,53$; $s_y = \sqrt{5,35} \approx 2,31$;

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{78,35}{114,53 \cdot 2,31} = \frac{78,35}{264,56} \approx 0,296.$$

Составляем уравнение эмпирической линии регрессии y на x :

$$y = 10,41 + 0,296 \cdot \frac{2,31}{114,53} (x - 111,9),$$

$$y = 0,006x + 9,74.$$

Строим линию регрессии и случайные точки $(x_i; y_j)$ (рис. 1). ◀

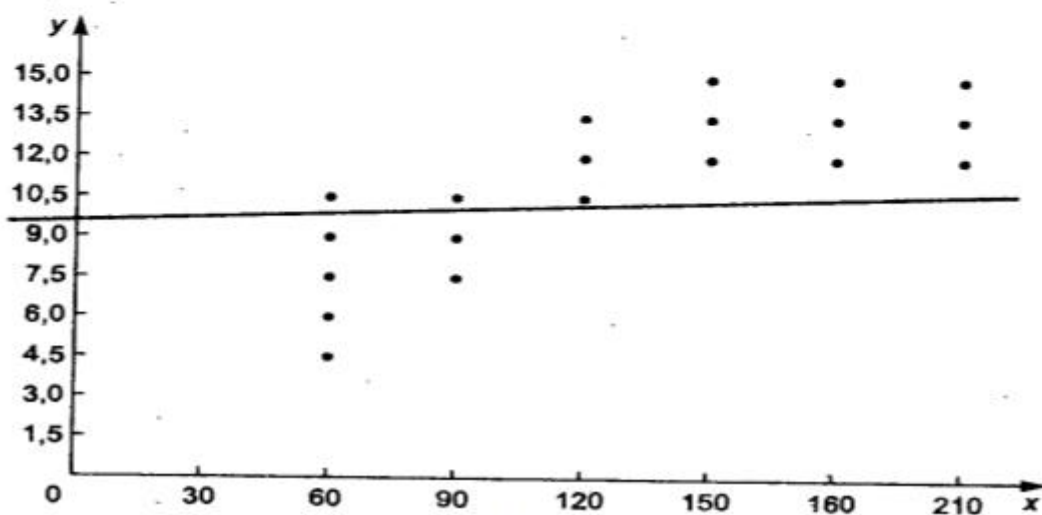


Рис. 1

**Критические значения коэффициента
корреляции рангов Спирмена**

<i>n</i>	<i>p</i>		<i>n</i>	<i>p</i>		<i>n</i>	<i>p</i>	
	0,05	0,01		0,05	0,01		0,05	0,01
5	0,94	–	17	0,48	0,62	29	0,37	0,48
6	0,85	–	18	0,47	0,60	30	0,36	0,47
7	0,78	0,94	19	0,46	0,58	31	0,36	0,46
8	0,72	0,88	20	0,45	0,57	32	0,36	0,45
9	0,68	0,83	21	0,44	0,56	33	0,34	0,45
10	0,64	0,79	22	0,43	0,54	34	0,34	0,44
11	0,61	0,76	23	0,42	0,53	35	0,33	0,43
12	0,58	0,73	24	0,41	0,52	36	0,33	0,43
13	0,56	0,70	25	0,49	0,51	37	0,33	0,43
14	0,54	0,68	26	0,39	0,50	38	0,32	0,41
15	0,52	0,66	27	0,38	0,49	39	0,32	0,41
16	0,50	0,64	28	0,38	0,48	40	0,31	0,40

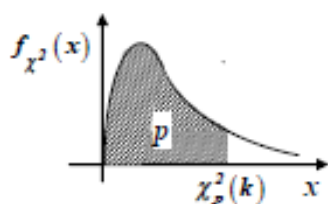


Таблица 2. Квантили $\chi_p^2(k)$ распределения $\chi^2(k)$.

$k \backslash P$	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995
1	0,0 ⁴ 39	0,0 ³ 15	0,0 ³ 98	0,0 ² 39	0,015	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	24,6	27,6	30,2	33,4	35,7
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
35	17,2	18,5	20,6	22,5	24,8	46,1	49,8	53,2	57,3	60,3
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
45	24,3	25,9	28,4	30,6	33,4	57,5	61,7	65,4	70,0	73,2
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
75	47,2	49,5	52,9	56,1	59,8	91,1	96,2	100,8	106,4	110,3
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	118,5	124,3	129,6	135,6	140,2